**LATIHAN SOAL**

**INTEGRAL**

1. Dengan menggunakan sifat kelinearan integral, evaluasi integral berikut ini

|  |  |
| --- | --- |
| a. |  |
| b. |  |
| c. |  |

Jawab :

1. Gunakan sifat kelinearan integral berikut ;

dimana,

dan

Maka,

*Catatan :*

*hasilnya berupa sebuah konstanta lagi sehingga dianggap sama dengan C, atau .*

1. Penggunaan variabel bukanlah sebuah masalah, sepanjang diferensial yang bersangkutan adalah . Begitupun ketika notasi variabel yang lain misalnya, , dll.

Maka,

1. Cari anti turunan dari

Jawab :

Jawab :

Evaluasi integral berikut;

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 4. |  |  |

Jawab :

*Cara 1 :*

Misalkan, , maka atau

Dan integralnya menjadi,

*Cara 2 ;*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5. |  |  |

Jawab :

Fungsi adalah produk dari dan . Dan jelas fungsi adalah ***fungsi komposit*** . Maka haruslah fungsi . Sedangkan adalah bagian yang lainnya. Fungsi adalah turunan dari fungsi yang diberi kurung pada integral tersebut, dan jelas terlihat bahwa,

Sehingga, bila kita misalkan , maka akan memberikan

Bila maka .

Maka dengan menggunakan aturan,

Kita peroleh

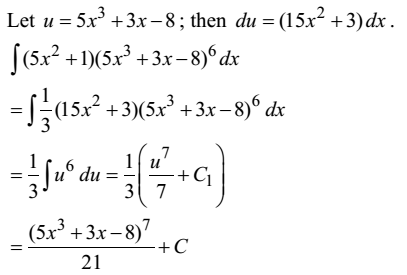
|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 6. |  |  |

Jawab :

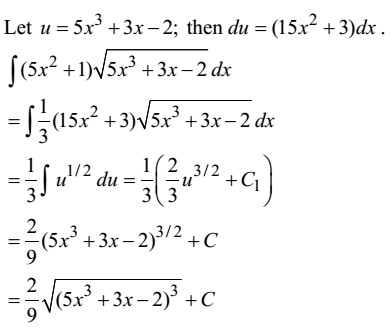
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 7. |  |  |

Jawab :



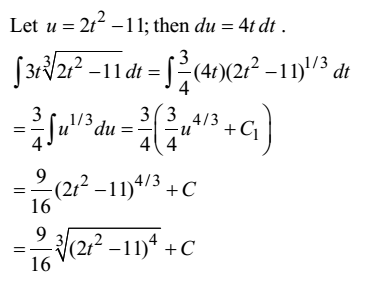
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 8. |  |  |

Jawab :



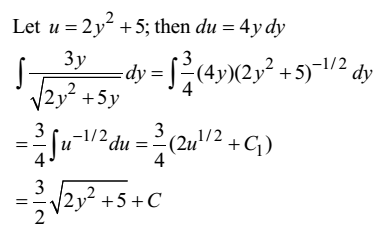
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 9. |  |  |

Jawab :



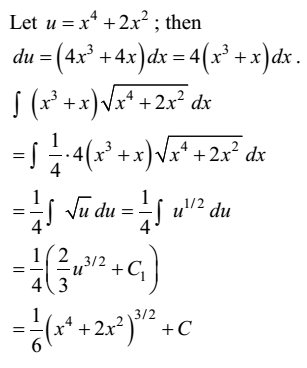
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 10. |  |  |

Jawab :



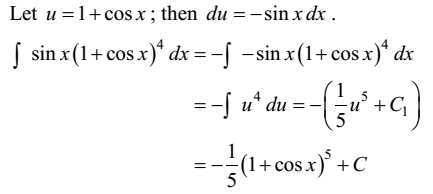
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 11. |  |  |

Jawab :



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 12. |  |  |

Jawab :



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 13. |  |  |

Jawab :

Misalkan, . Maka, .

Sehingga,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 14. |  |  |

Jawab :

Untuk menyelesaikan integral diatas, kita manfaatkan integral subtitusi. Dimana kita memisalkan,

Sehingga,

Maka akan kita peroleh,

dimana

Jadi,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 15. |  |  |

Jawab :

Misalkan,

Maka,

Sehingga integral diatas dapat kita modifikasi menjadi,

Jadi,

**Integral fungsi trigonometri**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 16. |  |  |

Jawab :

Manfaatkan identitas trigonometri berikut;

1. , dan
2. .

Perhatikan identitas no. 2 berikut,

Pindahkan ke ruas kiri dan ke ruas kanan,

Kemudian manfaat kan identitas no 1 untuk memperoleh ungkapan berikut,

Sehingga,

atau

Maka,

*Perhatikan bagian integral berikut :*

*Bila kita misalkan, , maka , maka*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 16. |  |  |

Jawab :

Dari identitas triginometri kita ketahui bahwa,

Dan karena,

Maka integral diatas dapat dituliskan sebagai berikut,

Kemudian berdasarkan formula integral dasar yang telah dketahui, yaitu

Maka,

*Penjelasan :*

*Dari sifat fungsi logaritma diketahui bahwa sifat dari* (akan dijelaskan dalam bab Fungsi Transenden)

*Dan, dari identitas trigonometri diketahui bahwa*

*Maka,*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 17. |  |  |

Jawab :

Untuk menyelesaikan soal diatas maka kita harus mampu “menyederhanakan integrannya” dan juga harus mampu memanfaatkan identitas trigonometri yang ada. Sekarang kita coba selesaikan integral tersebut.

“Sederhanakan” integral diatas,

Ada dua hal yang terbaca dari integral (\*) diatas, yaitu :

1. Bahwa adalah turunan dari
2. Kita dapat memanfaatkan identitas trigonometri

Sehingga,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 18. |  |  |

Jawab :

Untuk memudahkan, rubah bentuk integral diatas menjadi

Jadi,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 19. |  |  |

Jawab :

Untuk memecahkan integral diatas, uraikan integran-nya sehingga kita memperoleh bentuk integran yang lebih memudhkan untuk diintegralkan.

Tuliskan bentuk integral diatas seperti berikut ini,

Kemudian manfaat identitas triginometri berikut ;

1. , dan
2. .

Perhatikan proses manipulasi identitas trigonometri diatas berikut ini ;

Dari,

Kita peroleh,

Dan,

Sehingga,

Akhirnya,

Maka,

Jadi,

*Penjelasan :*

*Mengapa ?*

*Jawab :*

*Perhatikan identitas trigonometri berikut,*

*Hal yang sama juga berlaku untuk,*

*Dan juga bila,*

*Maka hal yang sama juga berlaku untuk,*

*Sehingga,*

*Diperoleh,*

*Akhirnya,*

*Jadi terbukti bahwa,*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 19. |  |  |

Jawab :

Telah kita ketahui identitas trigonometri berikut ini,

Hal yang sama pun berlaku untuk identitas trigonometri berikut,

Sehingga integral diatas dapat kita tuliskan dalam bentuk,

Jadi,

21. Sebuah roket ditembakkan keatas dengan kecepatan awal 256 ft/s.

1. Kapan roket tersebut mencapai tinggi maksimum ?
2. Berapa tinggi maksimum yang dicapai roket tersebut ?
3. Kapan roket tersebut menyentuh tanah kembali ?
4. Berapa kecepatannya ketika mencapai tanah ?

Jawab :

Telah diketahui dari kuliah fisika dasar bahwa kecepatan adalah turunan posisi terhadap waktu (dalam bahasa fisika kecepatan adalah perubahan posisi terhadap waktu) dan percepatan adalah turunan kecepatan terhadap waktu (dalam bahasa fisika percepatan adalah perubahan kecepatan terhadap waktu). Atau dalam lambang matematika, dituliskan sebagai berikut :

Dalam kasus ini, roket bergerak vertikal keatas dari keadaan diam. Maka yang berpengaruh dalam gerak roket tersebut adalah percepatan gravitasi bumi, , sehingga model peramaan integral-nya adalah

Tanda, -, muncul karena roket bergerak keatas melawan gravitsi bumi.

Bila kita anggap percepetan gravitasi bumi adalah, , maka

Dimana nilai dan ditentukan oleh kondisi awal sistemm. Dalam kasus ini, telah diberikan kondisi awal yaitu dan . Maka, dan , sehingga

1. Pada ketinggian maksimum,

Jadi waktu yang ditempuh roket untuk mencapai tinggi maksimum adalah 8 detik.

1. Untuk memperoleh tinggi maksimum roket, subtitusikan hasil a. ke persamaan

Maka,

Jadi, tinggi maksimum yang dicapai roket adalah .

1. Dari syarat awal, , maka

Dari persamaan diatas akan dihasilkan dua akar persamaannya, yaitu

Maka disimpulkan bahwa pada roket meninggallkan tanah, dan pada roket kembali menyentuh tanah setelah ditembakkan ke atas.

1. Roket menyentuh tanah kembali setelah bergerak selama 16 detik. Maka, kecepatannya pada saat menyentuh tanah adalah

Jadi, kecepatan roket ketika menyentuh tanah kembali adalah .

1. Carilah persamaan garis yang melewati titik (2,3) dan memiliki kemiringan *(slope)* dari setiiap titik .

Jawab :

Kemiringan diberikan oleh turunan. Maka,

Persamaan garisnya diperoleh dari integral kemiringannya, yaitu

Karena titik (2,3) berada pada kurva, maka

Diperoleh .

Jadi, persamaan garisnya adalah